

## Capítulo 3 - Resistência dos Materiais

### 3.1. Definição

A Resistência dos Materiais é um ramo da Mecânica Aplicada que estuda o comportamento dos sólidos quando estão sujeitos a diferentes tipos de carregamento. Os sólidos considerados nesta disciplina são barras carregadas axialmente, eixos, vigas e colunas, bem como estruturas que possam ser formadas por esses elementos.

Geralmente, o objetivo da análise será a determinação das tensões, deformações específicas e deformações totais produzidas pelas cargas; se essas quantidades puderem ser determinadas para todos os valores crescentes de carga, até o ponto da fratura, tem-se um quadro completo do corpo.

### 3.2. Tensões e Deformações

Os conceitos de tensão e deformação podem ser ilustrados, de modo elementar, considerando-se o alongamento de uma barra prismática, Figura 1.1(a). Uma barra prismática tem seção constante em todo o comprimento e eixo reto. Nesta figura, supõe-se a barra carregada nas extremidades por forças axiais,  $P$ , que produzem alongamento uniforme ou *tração* na barra. Fazendo um corte imaginário (corte mm) na barra, normal ao seu eixo, é possível isolar parte dela como corpo livre, Figura 1.1(b). A força  $P$  é aplicada na extremidade direita, aparecendo à esquerda as forças que traduzem a ação da parte removida sobre a que ficou.

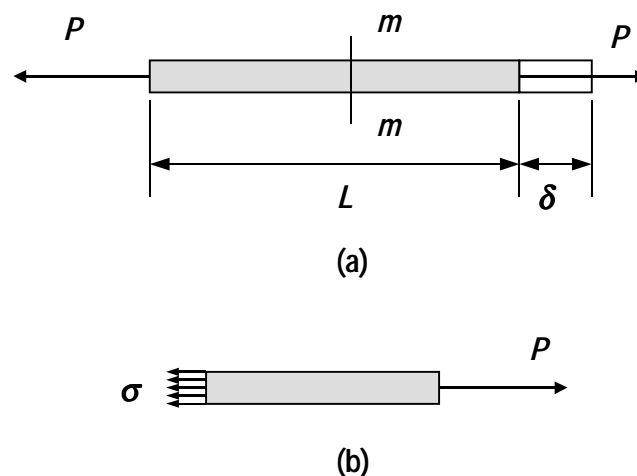


Figura 3.1 – Barra prismática sobre tração

A força por unidade de área é denominada *tensão*, sendo comumente designada pela letra grega  $\sigma$ . Supondo que a tensão seja uniformemente distribuída sobre toda a seção transversal, pode-se ver facilmente que a resultante é dada pelo produto da intensidade de  $\sigma$  pela área  $A$ , da seção transversal da barra, equação 3.1.

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad 3.1$$

Nesta equação, percebe-se que a unidade que mede a tensão é uma força dividida por uma área, ou seja,  $N/m^2$  (Pascal - Pa). Quando a barra está sendo alongada pela força  $P$ , como na figura, a tensão resultante é uma tensão normal de tração; se as forças tiverem o sentido oposto, comprimindo a barra, a tensão é de

*compressão*. Inicialmente, supõem-se que a força é aplicada no centróide da barra. Quando isto não acontecer e houver uma excentricidade na aplicação da barra, surgirá um esforço de flexão na mesma, sendo este caso, objeto de estudos futuros.

O alongamento total de uma barra que suporta uma força axial será designado pela letra grega  $\delta$ . Assim, o alongamento por unidade de comprimento, ou *alongamento específico*, denominado *deformação*,  $\varepsilon$ , é calculado pela equação 3.2.

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad 3.2$$

onde  $L$  é o comprimento total da barra. Note-se que a deformação  $\varepsilon$  é uma quantidade adimensional, podendo ser determinada pela equação 3.2 caso o alongamento seja uniforme ao longo da barra. Se a barra estiver sob tração, ter-se-á uma *deformação de tração*, representando um alongamento do material; se a barra estiver sob compressão, tem-se uma *deformação de compressão*, o que significa que as seções transversais adjacentes aproximam-se-ão.

### 3.3. O Ensaio de Tração

A relação entre as tensões e as deformações, para um determinado material, é encontrada por meio de um *ensaio de tração*.

Um corpo de prova que pode ser uma barreta circular ou retangular, é colocado na máquina de testar e submetido à tração. A força atuante e as deformações resultantes são medidas à proporção que a carga aumenta. Obtém-se as tensões dividindo as forças pela área da seção transversal da barra, e a deformação específica dividindo o alongamento pelo comprimento ao longo do qual ocorre deformação. Deste modo, obtém-se um *diagrama tensão x deformação* completo para o material em estudo.

A forma típica do diagrama tensão x deformação para o aço estrutural aparece na Figura 3.2 onde as deformações axiais estão representadas no eixo horizontal, sendo as tensões correspondentes dadas pelas ordenadas dos pontos *OADCDE*. De *O* até *A*, as tensões são diretamente proporcionais às deformações e o diagrama é *linear*. A partir deste ponto, a proporcionalidade já não existe mais e o ponto *A* é chamado *limite de proporcionalidade*. Com o aumento da carga, as deformações crescem mais rapidamente do que as tensões, até um ponto *B*, onde uma deformação considerável começa a aparecer, sem que haja aumento apreciável da força de tração. Este fenômeno é conhecido como *escoamento* do material e a tensão no ponto *B* é denominada *tensão de escoamento* ou *ponto de escoamento*. Na região *BC*, diz-se que o material tornou-se *plástico* e a barra pode realmente, deformar-se plasticamente, da ordem de 10 a 15 vezes o alongamento ocorrido até o limite da proporcionalidade. No ponto *C*, o material começa a oferecer resistência adicional ao aumento da carga, acarretando acréscimo de tensão para um aumento da deformação, atingindo o valor máximo ou *tensão máxima*<sup>2</sup>, no ponto *D*. Além deste ponto, a deformação aumenta ocorrendo diminuição da carga até que aconteça, finalmente, a ruptura do corpo-de-prova no ponto *E* do diagrama.

Durante o alongamento da barra, há uma contração lateral, que resulta na diminuição da área de seção transversal. Isto não tem nenhum efeito no diagrama tensão x deformação até o ponto *C*, porém, deste ponto em diante, a diminuição da área afeta de maneira apreciável o cálculo da tensão. Ocorre *estragulamento* (estricção) na barra, Figura 3.3 que, no caso de ser considerado no cálculo de  $\sigma$ , tomando-se a área real da seção reduzida, fará com que a curva do diagrama *tensão x*

<sup>2</sup> A *tensão máxima* do teste de tração é conhecida também pelos nomes de *tensão de ruptura* e *tensão de tração*. Esta última designação deve ser evitada pela confusão que traz com as tensões de tração que atuam na peças.

*deformação verdadeiro* siga a linha interrompida  $CE'$  da Figura 3.2. A carga total que a barra suporta diminui depois de atingir a tensão máxima, linha  $DE$ , porém tal diminuição decorre da redução da área e não por perda da resistência do material. Este resiste realmente a um acréscimo de tensão até o ponto de ruptura. Entretanto, para fins práticos, o *diagrama tensão x deformação convencional*,  $OABCDE$ , baseado na seção transversal original, dá informações satisfatórias para fins de projeto.

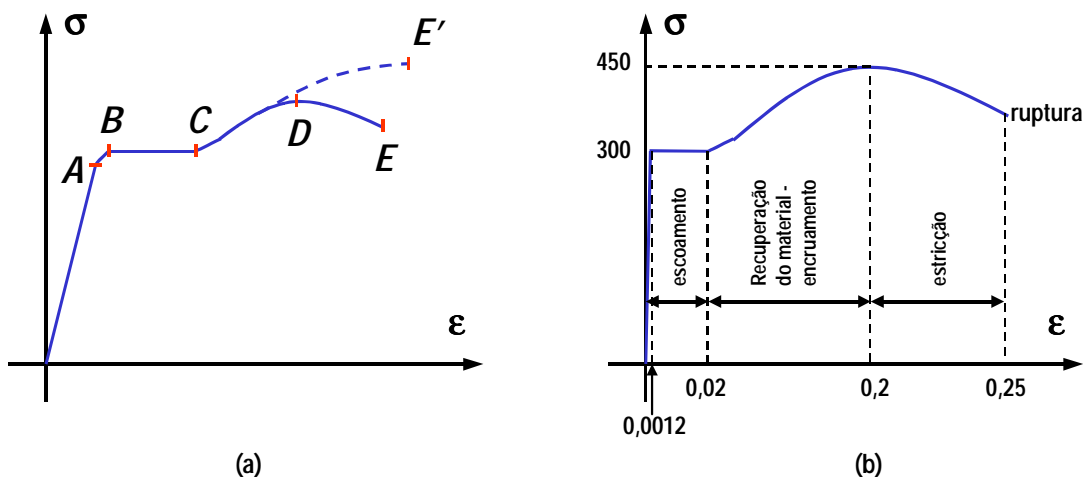


Figura 3.2 – Diagrama tensão x deformação do aço: (a) sem escala; (b) em escala



Figura 3.3 – Corpo de prova, máquina de ensaio, estrição

É possível traçar diagramas análogos aos de tração, para vários materiais sob compressão, estabelecendo-se tensões características, tais como limite de proporcionalidade, escoamento, e tensão máxima.

Os materiais costumam ser divididos em dúcteis e frágeis. Os materiais dúcteis que compreendem o aço estrutural e outros metais, se caracterizam por apresentarem um patamar de escoamento bem definido.

Já os materiais frágeis, como ferro fundido, vidro e pedra, são caracterizados por uma ruptura que ocorre sem nenhuma mudança sensível no modo de deformação do material. Então, para os materiais frágeis não existe diferença entre tensão última e tensão de ruptura. Além disso, a deformação até a ruptura é muito menor nos materiais frágeis do que nos materiais dúcteis.

### 3.3.1. Elasticidade

Os diagramas tensão x deformação apresentados anteriormente, ilustram o comportamento de vários materiais, quando *carregados* por tração. Quando um corpo-de-prova do material é *descarregado*, isto é, a carga é gradualmente diminuída até zero, a deformação sofrida durante o carregamento desaparecerá parcial ou completamente. Esta propriedade do material, pela qual ele tende a retornar à forma original, é denominada elasticidade. Quando a barra volta completamente à forma original, perfeitamente *elástica*; mas se o retorno não for total, é *parcialmente elástica*. Neste último caso, a deformação que permanece depois de retirada a carga é denominada *deformação permanente*.

Ao se fazer um ensaio de tração em determinado material, a carga pode ser levada até um certo valor (pequeno) e, em seguida, removida. Não havendo deformação permanente, isto é, se a deformação da barra voltar a zero, o material é elástico até aquele valor atingido pela carga. Este processo de carregar e descarregar o material pode ser repetido para sucessivos valores, cada vez mais alto. Em certo momento, atingir-se-á um valor que fará com que a deformação não volte a zero quando se retirar o carregamento da barra. Desta maneira, pode-se determinar a tensão que representa o limite superior da região elástica; esta tensão é chamada *limite elástico*. Para os aços e alguns outros materiais, os limites elástico e de proporcionalidade são aproximadamente coincidentes. Materiais semelhantes à borracha, entretanto, possuem uma proporcionalidade – a elasticidade – que pode continuar muito além do limite de proporcionalidade.

### 3.3.2. Tensão Admissível

Ao projetar uma estrutura, é necessário assegurar-se que, nas condições de serviço, ela atingirá o objetivo para o qual foi calculada. Do ponto de vista da capacidade de carga, a tensão máxima na estrutura é, normalmente, mantida abaixo do limite de proporcionalidade, porque somente até aí não haverá deformação permanente, caso as cargas sejam aplicadas e, depois, removidas. Para permitir sobrecargas acidentais, bem como para levar em conta certas imprecisões na construção e possíveis desconhecimentos de algumas variáveis na análise as estrutura, normalmente emprega-se um *coeficiente de segurança*, escolhendo-se uma *tensão admissível*, ou *tensão de projeto*, abaixo do limite de proporcionalidade. Há outras situações em que a tensão admissível é fixada tomando-se um coeficiente de segurança adequado sobre a tensão máxima do material. Isto é normal quando se trata de materiais quebradiços, tais como o concreto ou a madeira. Em geral, quando se projeta em função da tensão admissível, uma das equações seguintes deve ser usada no cálculo da tensão admissível,  $\sigma_{adm}$ ,

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{n_1} \text{ ou } \sigma_{adm} = \frac{\sigma_{lim}}{n_2} \quad 3.3$$

onde  $\sigma_e$  e  $\sigma_{lim}$  representam, respectivamente, a tensão no ponto de escoamento e a tensão máxima do material, e  $n_1$  e  $n_2$ , os coeficientes de segurança. A escolha adequada do coeficiente de segurança é assunto complicado pois depende do tipo de material e das condições de serviço. Quando as cargas são dinâmicas (subitamente aplicadas ou com intensidade variável), tais como as que ocorrem nas máquinas, aviões, pontes, etc., é necessário usar maiores coeficientes de segurança do que os correspondentes às cargas estáticas, dada a possibilidade de falhas por fadiga do material.

Uma alternativa ao uso da tensão admissível no projeto é calcular a estrutura com um coeficiente de segurança que evite o colapso completo. A intensidade da carga (ou cargas) que causará a ruptura da estrutura deve ser determinada em

primeiro lugar para, em seguida, determinar-se a carga admissível (ou carga de trabalho), dividindo-se a carga de ruptura por um *fator de carga adequado*. Este método de cálculo é conhecido como *projeto por carga de ruptura*. Verifica-se que, nestes casos, as intensidades das tensões reais na estrutura não têm participação direta na determinação das cargas de trabalho. No cálculo das estruturas metálicas, tanto o método da tensão admissível quanto o da *carga de ruptura* são de uso corrente.

### 3.4. Elasticidade Linear e Lei de Hooke

Os diagramas tensão x deformação da maioria dos materiais estruturais apresentam uma região inicial de comportamento elástico linear. Quando um material se comporta elasticamente e apresenta, também, uma relação linear entre tensão e deformação, diz-se que é *linearmente elástico*. Esta é uma propriedade extremamente importante de muitos materiais sólidos, incluindo a maioria dos metais, plásticos, madeira, concreto e cerâmicas.

A relação linear entre a tensão e a deformação, no caso de uma barra em tração, pode ser expressa pela equação,

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad 3.4$$

onde  $E$  é uma constante de proporcionalidade conhecida como *módulo de elasticidade* do material.

Este é o coeficiente angular da parte linear do diagrama tensão x deformação e é diferente para cada material. Alguns valores de  $E$  são apresentados na tabela abaixo (as unidades do módulo de elasticidade são iguais às de tensão). Nos cálculos, as tensões e deformações de tração são, em geral, consideradas positivas, enquanto que as de compressão são negativas. O módulo de elasticidade é conhecido também como *módulo de Young*, por referência ao cientista inglês Thomas Young (1773-1829), que estudou o comportamento elástico das barras. A equação é conhecida como *Lei de Hooke*, pelos trabalhos de outro cientista inglês, Robert Hooke (1635-1703), que foi o primeiro a estabelecer experimentalmente a relação linear existente entre tensões e deformações.

Material	Massa específica (N/m <sup>3</sup> )	Módulo de elasticidade E (MPa = 10 <sup>3</sup> kN/m <sup>2</sup> )	Módulo de elasticidade transversal G (MPa = 10 <sup>3</sup> kN/m <sup>2</sup> )	Tensão de escoamento $\sigma_e$ (MPa = 10 <sup>3</sup> kN/m <sup>2</sup> )	Tensão máxima de ruptura $\sigma_{lim}$ (MPa = 10 <sup>3</sup> kN/m <sup>2</sup> )
Aço	7,85 . 10 <sup>4</sup>	205.000	77.000 a 84.000	210 a 420	350 a 700
Aço (alta resistência)	7,85 . 10 <sup>4</sup>	205.000	77.000 a 84.000	350 a 1120	700 a 1960
Ferro fundido	7,77 . 10 <sup>4</sup>	105.000	42.000	42 a 280	210 a 420
Madeira (compressão)	0,277 a 0,832 . 10 <sup>4</sup>	7.000 a 14.000	-	-	28 a 70
Concreto (compressão)	2,36 . 10 <sup>4</sup>	14.000 a 28.000 <sup>3</sup>	-	-	14 a 70

Quando uma barra é carregada por tração simples, a tensão axial é  $\sigma = P / A$  e a deformação específica (alongamento relativo) é  $\varepsilon = \delta / L$ , como mostrado nas

<sup>3</sup> Depende do  $f_{ck}$  (resistência) do concreto

equações 3.1 e 3.2. Combinando-se estes resultados com a Lei de Hooke, tem-se a seguinte expressão para o alongamento da barra.

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A} \quad 3.5$$

Esta equação mostra que o alongamento de uma barra linearmente elástica é diretamente proporcional à carga e ao comprimento e inversamente proporcional ao módulo de elasticidade e à área da seção transversal. O produto EA é conhecido como *rigidez axial* da barra.

A flexibilidade de uma barra é definida como a deformação decorrente de uma carga unitária. Da equação anterior, tem-se que a flexibilidade é  $L / EA$ . De modo análogo, a *rijeza* da barra é definida como a força necessária para produzir uma deformação unitária; então, a rijeza é igual a  $EA/L$ , que é a recíproca da flexibilidade. Esse dois elementos, flexibilidade e rijeza têm grande importância na análise de vários tipos de estrutura.

### 3.4.2. Relação de Poisson

Quando uma barra é tracionada, o alongamento axial é acompanhado por uma contração lateral, isto é, a largura da barra torna-se menor e seu comprimento cresce. A relação entre as deformações transversal e longitudinal é constante, dentro da região elástica, e é conhecida como *relação ou coeficiente de Poisson*  $\nu$ ; assim,

$$\nu = \frac{\text{deformação lateral}}{\text{deformação axial}} \quad 3.6$$

Esse coeficiente é assim conhecido em razão do famoso matemático francês S. D. Poisson (1781-1840), que tentou calcular essa relação por meio de uma teoria molecular dos materiais. Para os materiais que têm as mesmas propriedades elásticas em todas as direções, denominados *isotrópicos*, Poisson achou  $\nu = 0,25$ . Experiências com metais mostraram que  $\nu$  usualmente cai na faixa de 0,25 a 0,35.

Após definir-se o coeficiente de Poisson, pode-se obter então a deformação transversal,

$$\varepsilon_t = -\nu \varepsilon \quad 3.7$$

### 3.5. Deformações de Barras Carregadas Axialmente

Há uma variedade de casos que envolvem barras com carregamento axial em que as deformações podem ser calculadas pela equação 3.5. Por exemplo, é fácil determinar as deformações de uma barra carregada axialmente não somente pelas extremidades como também por uma ou mais forças axiais intermediárias, como se vê na Figura 3.4(a). O procedimento para determinação da deformação da barra representada nesta figura consiste em se obter a força axial em cada parte da barra, isto é, nas partes AB, BC e CD e, em seguida, calcular separadamente o alongamento (ou encurtamento) de cada parte. A soma algébrica dessas variações de comprimento dará a variação total da barra. O mesmo método pode ser usado quando a barra é formada por partes de diferentes seções transversais, como ilustrado na Figura 3.4(b). Assim, vemos que, em geral, a deformação total  $\delta$ , de barras formadas por várias partes, sob ação de forças axiais ou tendo áreas diferentes de seções transversais, pode ser obtida pela equação

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{P_i L_i}{E_i A_i} \quad 3.8$$

na qual o índice  $i$  identifica as várias partes da barra, sendo  $n$  o número total de partes.

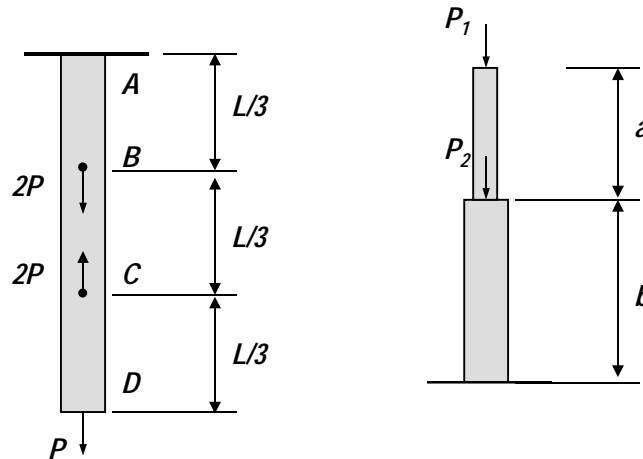
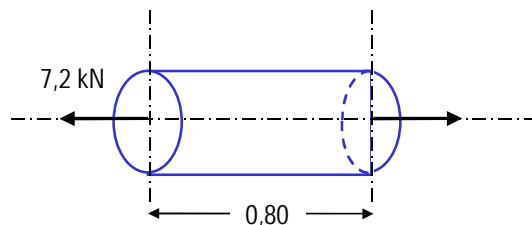


Figura 3.4 – Barras carregadas axialmente

### Exemplo 1

A barra circular de aço apresentada na figura abaixo possui  $d = 20$  mm e comprimento  $l = 0,80$  m. Encontra-se submetida à ação de uma carga axial de 7,2 kN. Pede-se determinar:

- (a) tensão normal atuante na barra
- (b) o alongamento
- (c) a deformação longitudinal
- (d) a deformação transversal



Dados:

$$E_{\text{aço}} = 210.000 \text{ MPa}$$

$$\nu_{\text{aço}} = 0,3 \text{ (coeficiente de Poisson)}$$

### Solução

- (a) tensão normal atuante

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4F}{\pi d^2}$$

$$\sigma = \frac{4 \cdot 7200 \text{ N}}{\pi (20 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = \frac{4 \cdot 7200 \text{ N}}{\pi \cdot 20^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = \frac{4 \cdot 7200}{\pi \cdot 20^2} \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma = 22,9 \text{ MPa}$$

- (b) alongamento da barra ( $\delta$ )

$$\delta = \frac{PL}{EA} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{22,9 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 0,80 \text{ m}}{210000 \cdot 10^6 \text{ Pa}}$$

$$\delta = 0,087 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,087 \text{ mm}$$

(c) a deformação longitudinal ( $\epsilon$ )

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0,087 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0,80 \text{ m}}$$

$$\epsilon = 0,000109 \text{ m/m} = 109 \mu\epsilon$$

(d) a deformação transversal ( $\epsilon_t$ )

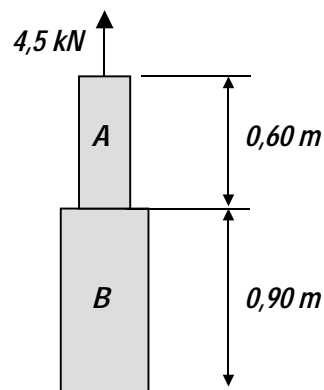
$$\epsilon_t = -\nu \cdot \epsilon = -0,3 \cdot 109$$

$$\epsilon_t = -33 \mu\epsilon$$

## Exemplo 2

A figura apresentada a seguir representa duas barras de aço soldadas. A carga de tração que atua no conjunto é de 4,5 kN. A seção A da peça possui  $d_A = 15 \text{ mm}$  e comprimento  $l_A = 0,60 \text{ m}$ , sendo que a seção B possui  $d_B = 25 \text{ mm}$  e  $l_B = 0,90 \text{ m}$ . Desprezando-se o efeito do peso próprio do material, pede-se determinar para as seções das peças A e B:

- (a) tensão normal
- (b) o alongamento
- (c) a deformação longitudinal
- (d) a deformação transversal
- (e) o alongamento total da peça



## Solução

(a) tensão normal

$$\sigma_A = \frac{F}{A_A} = \frac{F}{\frac{\pi d_A^2}{4}} = \frac{4F}{\pi d_A^2}$$

$$\sigma_A = \frac{4 \cdot 4500 \text{ N}}{\pi (15 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = \frac{4 \cdot 4500 \text{ N}}{\pi \cdot 15^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = \frac{4 \cdot 4500}{\pi \cdot 15^2} \cdot \left(10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$$

MPa



$$\sigma_A = 25,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{F}{A_B} = \frac{F}{\frac{\pi d_B^2}{4}} = \frac{4F}{\pi d_B^2}$$

$$\sigma_B = \frac{4 \cdot 4500 \text{ N}}{\pi (25 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = \frac{4 \cdot 4500 \text{ N}}{\pi \cdot 25^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = \frac{4 \cdot 4500}{\pi \cdot 25^2} \cdot \left( \frac{10^6 \text{ N}}{\text{m}^2} \right) \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = 9,2 \text{ MPa}$$

(b) alongamento da barra ( $\delta$ )

$$\delta_A = \frac{P L_A}{E A_A} = \frac{\sigma_A L_A}{E} = \frac{25,5 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 0,60 \text{ m}}{210000 \cdot 10^6 \text{ Pa}}$$

$$\delta_A = 0,073 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,073 \text{ mm}$$

$$\delta_B = \frac{P L_B}{E A_B} = \frac{\sigma_B L_B}{E} = \frac{9,2 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 0,90 \text{ m}}{210000 \cdot 10^6 \text{ Pa}}$$

$$\delta_B = 0,039 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,039 \text{ mm}$$

(c) a deformação longitudinal ( $\epsilon$ )

$$\epsilon_A = \frac{\delta_A}{L_A} = \frac{0,073 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0,60 \text{ m}}$$

$$\epsilon_A = 0,000122 \text{ m/m} = 122 \mu\epsilon$$

$$\epsilon_B = \frac{\delta_B}{L_B} = \frac{0,039 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0,90 \text{ m}}$$

$$\epsilon_B = 0,000043 \text{ m/m} = 43 \mu\epsilon$$

(d) a deformação transversal ( $\epsilon_t$ )

$$\epsilon_{tA} = -\nu \cdot \epsilon_A = -0,3 \cdot 122 \Rightarrow \epsilon_{tA} = -37 \mu\epsilon$$

$$\epsilon_{tB} = -\nu \cdot \epsilon_B = -0,3 \cdot 43 \Rightarrow \epsilon_{tB} = -13 \mu\epsilon$$

(e) o alongamento total da peça ( $\delta$ )

$$\delta = \delta_A + \delta_B = 0,073 + 0,039$$

$$\delta = 0,112 \text{ mm}$$